直交型三重旗多様体の軌道分解の一例 (表現論と調和解析における諸問題)

松木, 敏彦

数理解析研究所講究録
第 1770 巻 2011 年 119-130

直交型三重旗多様体の軌道分解の一例

龍谷大学文学部　松木敏彦 (Toshihiko Matsuki)
Faculty of Letters, Ryukoku University

G を体 $\mathbb{F}$ 上の代数群とし、$P_1,\ldots,P_k$ を G の放物型部分群とする。このとき、次の多重旗多様体の G-軌道分解を考える。

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= (G/P_1)\times\cdots\times(G/P_k)\\ &\cong (G\times\cdots\times G)/(P_1\times\cdots\times P_k)\end{aligned}$$

ただし、G は $\mathcal{M}$ に対角的に作用するものとする。すなわち

$$g\cdot(m_1,\ldots,m_k)=(gm_1,\ldots,gm_k)$$

$\mathbb{F}$ が無限体のときに、$\mathcal{M}$ が有限個の G-軌道に分解されるとき、$\mathcal{M}$ は有限型であるという。

注意 1 写像 $(g_1,\ldots,g_k)\mapsto(g_k^{-1}g_1,\ldots,g_k^{-1}g_{k-1})$ により、この軌道分解は

$$(G/P_1)\times\cdots\times(G/P_{k-1})$$

の P_k-軌道分解と同一視できる。

例 1 (Bruhat 分解) G が $\mathbb{F}$ 上 split するとき、注意 1 により、$k=2$ の場合は Bruhat 分解

$$G=\bigsqcup_{w\in W_2\backslash W/W_1} P_2wP_1$$

に帰着する。ただし、G のボレル部分群 B およびワイル群 W によって

$$P_1=\bigsqcup_{w\in W_1} BwB,\qquad P_2=\bigsqcup_{w\in W_2} BwB$$

(W_1,W_2 は W の部分群) とする。

例 2 $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$, $k=3$ のとき、

$$\mathcal{M}\cong \mathrm{P}^1(\mathbb{F})\times\mathrm{P}^1(\mathbb{F})\times\mathrm{P}^1(\mathbb{F})$$

であり、$\mathcal{M}$ は 5 個の G-軌道に分解される (Fig.1)。ただし、右端の数は $\mathbb{F}$ が q 個の元からなる有限体 $\mathbb{F}_q$ のときに各軌道に含まれる元の数である。

$$
\begin{tikzcd}
& \{\ell_1 = \ell_2 = \ell_3\} \arrow[dl, "3"'] \arrow[d, "1"] \arrow[dr, "2"] & & q+1 \\
\{\ell_1 = \ell_2 \neq \ell_3\} \arrow[dr, shift right, "1"'] \arrow[dr, shift left, "2"] & \{\ell_2 = \ell_3 \neq \ell_1\} \arrow[d, shift right, "2"'] \arrow[d, shift left, "3"] & \{\ell_3 = \ell_1 \neq \ell_2\} \arrow[dl, shift right, "1"'] \arrow[dl, shift left, "3"] & 3 \times q(q+1) \\
& \{\ell_1 \neq \ell_2 \neq \ell_3 \neq \ell_1\} & & (q-1)q(q+1)
\end{tikzcd}
$$

Fig.1. $GL_2(\mathbb{F})\backslash P^1(\mathbb{F}) \times P^1(\mathbb{F}) \times P^1(\mathbb{F})$ Total: $(q+1)^3$

1 知られている結果

1.1 GL_n-case

(Magyar-Weyman-Zelevinsky, 1999 [MWZ99]) $G = GL_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F}$ は代数的閉体のとき、

1. $k \geq 4 \Longrightarrow \mathcal{M}$ は無限型。
2. 有限型の三重旗多様体を分類。
3. 有限型の三重旗多様体について、

$$G\text{-軌道} \longleftrightarrow \text{quiver の表現の indecomposables への分解}$$

例 2 を含むいくつかの簡単な場合に、この結果を解説するのは非常に面白いが、別の機会にする。(注意： この結果は任意の体 $\mathbb{F}$ 上で成り立つと思われる。)

1.2 Sp_{2n}-case

(Magyar-Weyman-Zelevinsky, 2000 [MWZ00]) $G = Sp_{2n}(\mathbb{F})$, $\mathbb{F}$ は代数的閉体のときに同じことを行なった。この場合、$\mathbb{F}$ が代数的閉体であることは本質的である（1.4 節参照)。

1.3 Littelmann による spherical double cone の分類

Littelmann [L94] は開 B-軌道を持つ二重旗多様体 $(G/P_1) \times (G/P_2)$ を分類した。ただし G は単純代数群、B は G の Borel 部分群、P_1, P_2 は G の極

大放物型部分群とする。

このとき、$\mathbb{F}$ が標数 0 の代数的閉体ならば、Brion-Vinberg の定理 ([B86],[V86]) により、$(G/P_1) \times (G/P_2)$ 上の B-軌道の数は有限である。

したがって、G が直交群または例外群のときに、Littelmann の分類表にある $(G/P_1) \times (G/P_2)$ の B-軌道分解を具体的に記述するのは興味深い問題である。

1.4 柏原-Schapira の分解

$G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{T} = (G/P) \times (G/P) \times (G/P)$ ただし P は G の Siegel 放物型部分群とする。このとき、$\mathcal{T}$ の G-軌道分解は、柏原-Schapira の教科書 "Sheaves on Manifolds" (1990) の p.492 (exercise) に記述されている。すなわち、実 $2n$ 次元 symplectic ベクトル空間における 3 個の Lagrangian 部分空間の配置の問題で、"Maslov index" が自然に定義されている。

また、同様の問題が [FMS04] および [CN06] で扱われている。

1.5 その他の研究

西山-落合 [NO11] は複素対称対 (G, K) に対し、$(G/P) \times (K/Q)$ の K-軌道分解を研究した。

橋本 [H04] は任意の体 $\mathbb{F}$ 上で $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})/B$ の B_{n-1}-軌道分解を記述した。ただし、B_{n-1} は $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})$ の Borel 部分群である。P を $(n-1, 1)$ 型の極大放物型部分群とするとき、$(G/P) \times (G/B)$ 上の開 G-軌道は $G/(B_{n-1} \times \mathbb{F}^\times)$ と表わせる。したがって、この軌道分解は $(G/P) \times (G/B) \times (G/B)$ の G-軌道分解に open に埋め込まれる。

2 $M \times M \times M$ の G-軌道分解

$\mathbb{F}$ を標数 $\neq 2$ の体とし、$\mathbb{F}^{2n+1}$ 上の対称双線形形式 $(\ ,\ )$ を

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,2n+2-j}$$

で定義する。ただし、$e_1, \ldots, e_{2n+1}$ は $\mathbb{F}^{2n+1}$ の標準基底である。このとき、$2n+1$ 次 split 特殊直交群 G が

$$G = \{g \in \mathrm{SL}_{2n+1}(\mathbb{F}) \mid (gu, gv) = (u, v) \text{ for all } u, v \in \mathbb{F}^{2n+1}\}$$

で定義される。$\mathbb{F}^{2n+1}$ の部分空間 V は $(V, V) = \{0\}$ かつ $\dim V = n$ のとき、**maximally isotropic subspace** と呼ばれる。

$$M = \{V \mid V \text{ は } \mathbb{F}^{2n+1} \text{ の maximally isotropic subspace}\}$$

とおくと、M は G の等質空間となるので、$U_0 = \mathbb{F}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_n$, $P = \{g \in G \mid gU_0 = U_0\}$ とおくことにより、

$$M = GU_0 \cong G/P$$

と表わせる。P は G の一つの極大放物型部分群である。

三重旗多様体 $\mathcal{T} = M \times M \times M$ を G-軌道分解しよう。

$d = 0, \ldots, n$ に対し、$U_d = \mathbb{F}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{n-d} \oplus \mathbb{F}e_{n+2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{n+d+1}$ とおき、n の分割 $n = a + b + c_+ + c_0 + c_-$ に対し、

$$\begin{aligned}
&U_{(\alpha)} = \mathbb{F}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_a, \quad U_{(\beta)} = \mathbb{F}e_{2n-a-b+2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{2n-a+1}, \\
&U_{(+)} = \mathbb{F}e_{a+b+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{k_+}, \quad U_{(-)} = \mathbb{F}e_{n+2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{k_-}, \\
&U_{(0)} = \mathbb{F}e_{k_++1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{k_++c_0} \oplus \mathbb{F}e_{k_-+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{k_-+c_0} \oplus \mathbb{F}e_{n+1}
\end{aligned}$$

と定義する。ただし、$k_+ = a + b + c_+$, $k_- = n + c_- + 1$ とする。さらに、$W_{(0)} = U_{(\alpha)} \oplus U_{(\beta)} \oplus U_{(+)} \oplus U_{(-)}$ とおき、次の3種類の M の元を定義する。

$c_0 = 2c_1 - 1$ が奇数のとき、

$$\begin{aligned}
V(a,b,c_+,c_-)_{\mathrm{odd}} = W_{(0)} &\oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{c_1-1} \mathbb{F}(e_{k_++i} + e_{k_-+i})\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=c_1+1}^{c_0} \mathbb{F}(e_{k_++i} - e_{k_-+i})\right) \\
&\oplus \mathbb{F}(e_{k_++c_1} - \frac{1}{2}e_{k_-+c_1} + e_{n+1})
\end{aligned}$$

$c_0 = 2c_1$ が偶数のとき、

$$V(a,b,c_+,c_-)^0_{\mathrm{even}} = W_{(0)} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{c_1} \mathbb{F}(e_{k_++i} + e_{k_-+i})\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=c_1+1}^{c_0} \mathbb{F}(e_{k_++i} - e_{k_-+i})\right)$$

さらに、$c_0 = 2c_1$ が正の偶数のとき、

$$\begin{aligned}
V(a,b,c_+,c_-)^1_{\mathrm{even}} = W_{(0)} &\oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{c_1} \mathbb{F}(e_{k_++i} + e_{k_-+i})\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=c_1+1}^{c_0-1} \mathbb{F}(e_{k_++i} - e_{k_-+i})\right) \\
&\oplus \mathbb{F}(e_{k_++c_0} - e_{k_-+c_0} - \frac{1}{2}e_{k_-+1} + e_{n+1})
\end{aligned}$$

定理 1 $t = (V_{(1)}, V_{(2)}, V_{(3)}) \in \mathcal{T} = M \times M \times M$ に対し、

$$\begin{aligned}
&a = \dim(V_{(1)} \cap V_{(2)} \cap V_{(3)}),\ b = \dim(V_{(1)} \cap V_{(2)}) - a, \\
&c_+ = \dim(V_{(1)} \cap V_{(3)}) - a,\ c_- = \dim(V_{(2)} \cap V_{(3)}) - a, \\
&c_0 = n - a - b - c_+ - c_-,\ \varepsilon = \dim(V_{(1)} + V_{(2)} + V_{(3)}) + a - 2n \in \{0,1\}, \\
&d = n - a - b
\end{aligned}$$

とおくと、

(i) c_0 が奇数 $\Longrightarrow \varepsilon = 1,\ t \in G(U_0, U_d, V(a,b,c_+,c_-)_{\mathrm{odd}})$
(ii) $c_0 = 0 \Longrightarrow \varepsilon = 0,\ t \in G(U_0, U_d, V(a,b,c_+,c_-)^0_{\mathrm{even}})$
(iii) c_0 が正の偶数 $\Longrightarrow t \in G(U_0, U_d, V(a,b,c_+,c_-)^{\varepsilon}_{\mathrm{even}})$ *with* $\varepsilon = 0$ *or* 1

系 $\eta_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0,1,3,5,\ldots, \\ 2 & \text{if } k = 2,4,6,\ldots. \end{cases}$ とおくと、

$$|G\backslash\mathcal{T}| = \sum_{k=0}^{n} \eta_k \binom{n+3-k}{3} = \begin{cases} \frac{(n+2)^4}{16} & (n \text{ 偶数}) \\ \frac{(n+2)^4-1}{16} & (n \text{ 奇数}) \end{cases}$$

（最後の等式は落合啓之による。）

$n = 1,2,3,4$ のとき、軌道の数は、

n	1	2	3	4
$\lvert G\backslash\mathcal{T}\rvert$	5	16	39	81

定理 2 $\mathbb{F}$ が r 個の元からなる有限体 $\mathbb{F}_r$ のとき、

$$|Gt| = |M| \frac{r^{(n-a)(n-a+1)/2}[r]_n}{[r]_a[r]_b[r]_{c_+}[r]_{c_-}[r]_{c_0}} \psi^{\varepsilon}_{c_0}(r).$$

ただし $[r]_m = (r+1)(r^2+r+1)\cdots(r^{m-1}+r^{m-2}+\cdots+1)$,
$\psi^0_{2k}(r) = \psi^1_{2k-1}(r) = \dfrac{\psi^1_{2k}(r)}{r^{2k}-1} = r^{k(k-1)}(r-1)(r^3-1)\cdots(r^{2k-1}-1).$

注： $\psi^{\varepsilon}_{c_0}(r) = |\mathrm{GL}_{c_0}(\mathbb{F}_r)/H^{\varepsilon}_{c_0}|$ ただし

$$H^{\varepsilon}_{c_0} = \begin{cases} 1 \times \mathrm{Sp}_{c_0-1}(\mathbb{F}_r) & (c_0 \text{ 奇数}), \\ \mathrm{Sp}_{c_0}(\mathbb{F}_r) & (c_0 \text{ 偶数}, \varepsilon = 0), \\ Q_{c_0} = \{g \in \mathrm{Sp}_{c_0}(\mathbb{F}_r) \mid gv = v\} & (c_0 \text{ 偶数}, \varepsilon = 1) \end{cases}$$

$(0 \neq v \in \mathbb{F}_r^{c_0})$

3 $M \times M \times M_0$ の G-軌道分解

さらに G の full flag variety

$$M_0 = \{V_1 \subset \cdots \subset V_n \mid \dim V_i = i,\ (V_n, V_n) = \{0\}\} \cong G/B$$

を考え、三重旗多様体 $\mathcal{T}_0 = M \times M \times M_0$ を G-軌道分解しよう。

注意 2 $\dim M + \dim M + \dim M_0 = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n(n+1)}{2} + n^2 = n(2n+1) = \dim G.$
すなわち、$\mathcal{T}_0$ は G-開軌道が存在しうる最大次元を持つ。この場合、開軌道の存在は [L94] (Table 1) によって示されている。

定理 1 により $t = (U_0, U_d, V) \in \mathcal{T}$, $V = V(a,b,c_+,c_-)_{\mathrm{odd}}$, $V(a,b,c_+,c_-)^0_{\mathrm{even}}$ or $V(a,b,c_+,c_-)^1_{\mathrm{even}}$ を固定してよい。$\pi : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ が自然な射影 $M_0 \to M$ によって定まる。$\pi^{-1}(t)$ は

$$M_0(V) = \{V_1 \subset \cdots \subset V_n \mid V_n = V\}$$

と同一視できるので、$M_0(V)$ 上の $R(t) = P \cap P_{U_d} \cap P_V$ による軌道分解を記述すればよい。

定義 $M_0(V)$ の full flag $\mathcal{F} : V_1 \subset \cdots \subset V_n$ が次の条件を満たすとき、**standard** であるという。

$$\begin{aligned}
V_i &= (V_i \cap U_{(\alpha)}) \oplus (V_i \cap U_{(\beta)}) \oplus (V_i \cap (U_{(+)} \oplus U_{(-)})) \oplus (V_i \cap U_{(0)}),\\
V_i \cap U_{(\alpha)} &= \mathbb{F}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{a_i(\mathcal{F})},\\
V_i \cap U_{(\beta)} &= \mathbb{F}e_{2n-a-b+2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{2n-a-b+1+b_i(\mathcal{F})}
\end{aligned}$$

for all $i = 1, \ldots, n$. ただし、$a_i(\mathcal{F}) = \dim(V_i \cap U_{(\alpha)})$, $b_i(\mathcal{F}) = \dim(V_i \cap U_{(\beta)})$ とする。

standard full flag $\mathcal{F} : V_1 \subset \cdots \subset V_n$ に対し、$c_i(\mathcal{F}) = \dim(V_i \cap (U_{(+)} \oplus U_{(-)}))$, $d_i(\mathcal{F}) = \dim(V_i \cap U_{(0)})$ とおき、$I = \{1, \ldots, n\}$ の部分集合

$$\begin{aligned}
I_{(\alpha)} &= \{\alpha_1, \ldots, \alpha_a\} = \{i \in I \mid a_i(\mathcal{F}) = a_{i-1}(\mathcal{F}) + 1\},\\
I_{(\beta)} &= \{\beta_1, \ldots, \beta_b\} = \{i \in I \mid b_i(\mathcal{F}) = b_{i-1}(\mathcal{F}) + 1\},\\
I_{(\gamma)} &= \{\gamma_1, \ldots, \gamma_c\} = \{i \in I \mid c_i(\mathcal{F}) = c_{i-1}(\mathcal{F}) + 1\},\\
I_{(\delta)} &= \{\delta_1, \ldots, \delta_{c_0}\} = \{i \in I \mid d_i(\mathcal{F}) = d_{i-1}(\mathcal{F}) + 1\}
\end{aligned}$$

を定義する。ただし、$c = c_+ + c_-$, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_a$, $\beta_1 < \cdots < \beta_b$, $\gamma_1 < \cdots < \gamma_c$, $\delta_1 < \cdots < \delta_{c_0}$ とする。このとき、$I = I_{(\alpha)} \sqcup I_{(\beta)} \sqcup I_{(\gamma)} \sqcup I_{(\delta)}$ であり、I の置換 $\tau(\mathcal{F})$ が

$$\tau(\mathcal{F}) : (1\,2 \cdots n) \mapsto (\alpha_1 \cdots \alpha_a \gamma_1 \cdots \gamma_c \delta_1 \cdots \delta_{c_0} \beta_1 \cdots \beta_b)$$

によって定義できる。$\tau(\mathcal{F})$ の転倒数を $\ell(\tau(\mathcal{F}))$ とする。

$X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ に対し、

$$h[X] = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & J\,{}^tX^{-1}J \end{pmatrix}, \qquad J = J_n = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

とし、$A \in \mathrm{GL}_{c_+}(\mathbb{F})$, $B \in \mathrm{GL}_{c_0}(\mathbb{F})$, $C \in \mathrm{GL}_{c_-}(\mathbb{F})$ に対し,

$$\ell(A,B,C) = h\left[\begin{pmatrix} I_{a+b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix}\right]$$

とする。

G の部分群 L_+, L_0, L_-, L, L_V を

$$\begin{aligned} L_+ &= \{\ell(A, I_{c_0}, I_{c_-}) \mid A \in \mathrm{GL}_{c_+}(\mathbb{F})\}, \\ L_0 &= \{\ell(I_{c_+}, B, I_{c_-}) \mid B \in \mathrm{GL}_{c_0}(\mathbb{F})\}, \\ L_- &= \{\ell(I_{c_+}, I_{c_0}, C) \mid C \in \mathrm{GL}_{c_-}(\mathbb{F})\}, \end{aligned}$$

$L = L_+ \times L_0 \times L_-$, $L_V = \{\ell \in L \mid \ell V = V\}$ と定義する。

命題 (i) $L_V = L_+ \times (L_V \cap L_0) \times L_-$.

(ii) $V = V(a,b,c_+,c_-)_{\mathrm{odd}} \Longrightarrow L_V \cap L_0 \cong 1 \times \mathrm{Sp}_{c_0-1}(\mathbb{F})$,

$V = V(a,b,c_+,c_-)^0_{\mathrm{even}} \Longrightarrow L_V \cap L_0 \cong \mathrm{Sp}_{c_0}(\mathbb{F})$,

$V = V(a,b,c_+,c_-)^1_{\mathrm{even}} \Longrightarrow L_V \cap L_0 \cong Q_{c_0}$.

ただし、$Q_{c_0} = \{g \in \mathrm{Sp}_{c_0}(\mathbb{F}) \mid gv = v\}$ with some $v \in \mathbb{F}^{c_0} - \{0\}$.

定理 3 (i) 任意の $M_0(V)$ の full flag $\mathcal{F}$ に対し、$g\mathcal{F}$ が standard になるような $g \in R(t) = P \cap P_{U_d} \cap P_V$ が存在する。

(ii) $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ がともに standard full flag のとき、$g\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ for some $g \in R(t) \Longrightarrow g_L\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ for some $g_L \in L_V$.

(iii) $\mathbb{F} = \mathbb{F}_r$ のとき、standard full flag $\mathcal{F}$ に対し、$|R(t)\mathcal{F}| = [r]_a[r]_b r^{\ell(\tau(\mathcal{F}))}|L_V\mathcal{F}|$.

命題と定理 3 により、問題は次の 4 種類の部分群 H による $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})/B$ の軌道分解に帰着する。

(A) $H = \mathrm{GL}_{m_+}(\mathbb{F}) \times \mathrm{GL}_{m_-}(\mathbb{F})$ where $m_+ + m_- = n$,
(B) $H = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{F})$ for even n,
(C) $H = Q_n$ for even n,
(D) $H = 1 \times \mathrm{Sp}_{n-1}(\mathbb{F})$ for odd n.

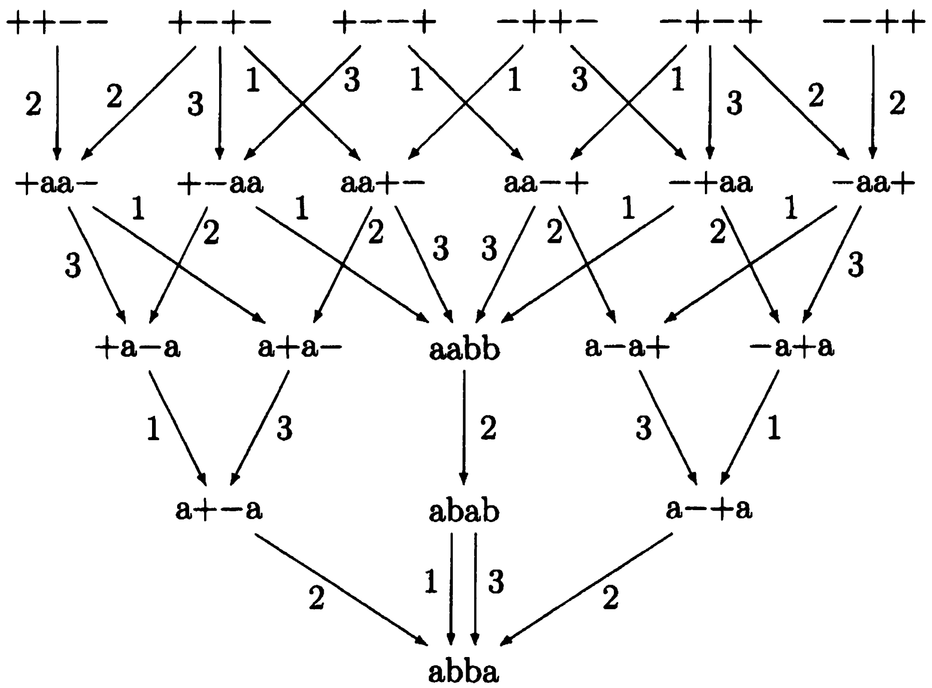
注意：(A)〜(D) については $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$ の条件は不要である。

4 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})/B$ の H-軌道分解

$\mathbb{F}=\mathbb{C}$ の場合、(A), (B) の H は $G=\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ の対称部分群であるので、軌道分解は [M79], [R79] によって得られている。[M10] では任意の体 $\mathbb{F}$ 上で同じ軌道分解ができることを示した。さらに、(C) の軌道分解も得られ、(D) は (C) に帰着することも示した。本稿では n が小さいときの軌道構造の図式を紹介する。詳細は [M10] を参照されたい。

(A) $\mathrm{GL}_{m_+}(\mathbb{F})\times\mathrm{GL}_{m_-}(\mathbb{F})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})/B$

軌道構造は "+−ab"-図式で表わせる。$n=4$, $m_+=m_-=2$ のときは次の図のようになる (Fig.5 in [MO90])。



記号の説明： $i=1,\ldots,n-1$ に対し、$\dim M_i=\dim M_0-1$ となる部分旗多様体

$$M_i=\{V_1\subset\cdots\subset V_{i-1}\subset V_{i+1}\subset\cdots\subset V_{n-1}\mid\dim V_j=j\}$$

と自然な射影 $p_i: M_0\to M_i$ を定義する。このとき、2つの H-軌道 S_1,S_2 に対し、

$$p_i(S_1)=p_i(S_2),\qquad \dim S_1+1=\dim S_2$$

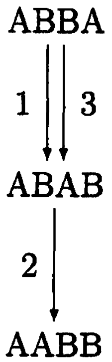
が成り立つ場合に、

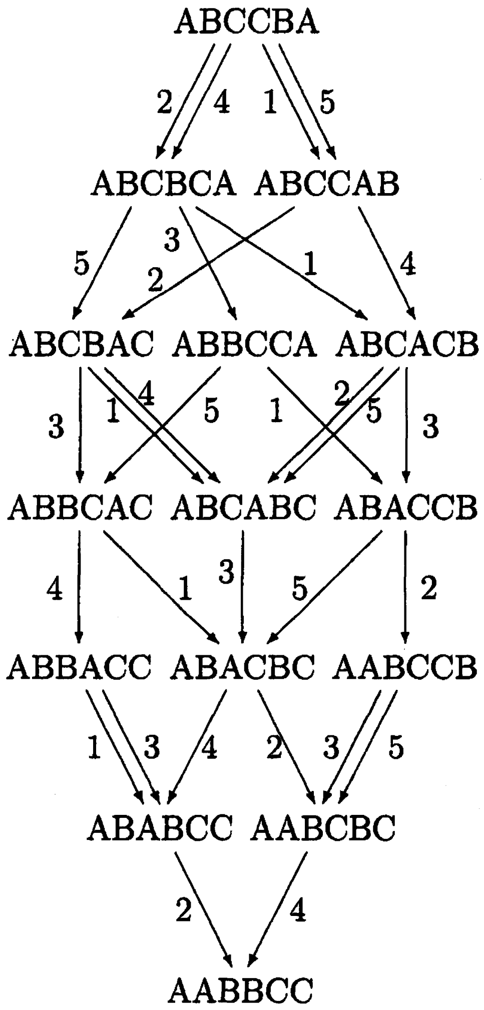
$$S_1\xrightarrow{i}S_2$$

と表示する。

(B) $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F})\backslash\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F})/B$

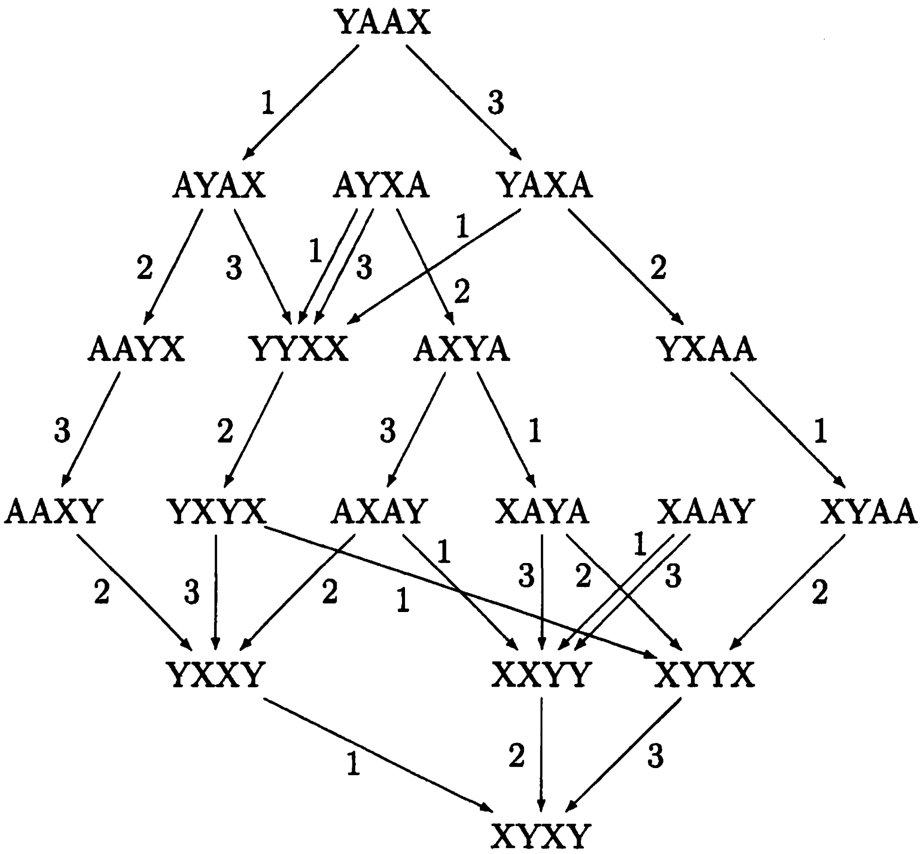
軌道構造は "AB"-図式で表わせる。$n=2,3$ のときは次の図のようになる (Fig.3 and Fig.4 in [MO90])。





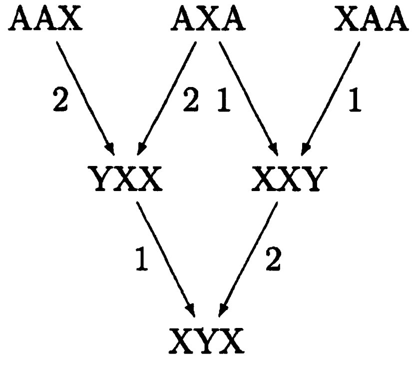
(C) $Q_{2n}\backslash\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F})/B$

軌道構造は "ABXY"-図式で表わせる。$n=2$ のときは次の図のようになる (詳細は [M10])。



(D) $1 \times \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F})\backslash \mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{F})/B$

軌道構造は (C) と同様に “ABXY”-図式で表わせる (詳細は [M10])。$n = 1$ のときは次の図のようになる（この場合、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{F})\backslash \mathrm{GL}_3(\mathbb{F})/B$ と軌道分解は同じ)。



References

[B86] M. Brion, *Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques*, Manuscripta Math. **55** (1986), 191–198.

[CN06] J.-P. Clerc and K.-H. Neeb, *Orbits of triples in the Shilov boundary of a bounded symmetric domain*, Transform. Groups. **11** (2006), 387–426.

[FMS04] E. Falbel, J.-P. Marco and F, Schaffhauser, *Classifying triples of Lagrangians in a Hermitian vector space*, Topology Appl. **144** (2004), 1–27.

[H04] T. Hashimoto, B_{n-1}-orbits on the flag variety GL_n/B_n, Geom. Dedicata **105** (2004), 13–27

[KS90] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematische Wissenschaften, Vol. 292, Springer-Verlag, New York, 1990.

[L94] P. Littelmann, *On spherical double cones*, J. Alg. **166** (1994), 142–157.

[MWZ99] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141** (1999), 97–118.

[MWZ00] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Symplectic multiple flag varieties of finite type*, J. Alg. **230** (2000), 245–265.

[M79] T. Matsuki, *The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups*, J. Math. Soc. Japan **31** (1979), 331–357.

[M10] T. Matsuki, *An example of orthogonal triple flag variety of finite type*, arXiv: 1011.6468.

[MO90] T. Matsuki and T. Oshima, *Embeddings of discrete series into principal series.* In The Orbit Method in Representation Theory, Birkhäuser, 1990, 147–175.

[NO11] K. Nishiyama and H. Ochiai, Double flag varieties for a symmetric pair and finiteness of orbits, J. of Lie Theory **21** (2011), 79–99.

[R79] W. Rossmann, *The structure of semisimple symmetric spaces*, Canad. J. Math. **31** (1979), 157–180.

[V86] E. B. Vinberg, *Complexity of action of reductive groups*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 1–11.